Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (27/6/2019)

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1 :

i. Έστω ότι η σειρά $\sum |a_k| < +\infty$.

Θδο η σειρά $\sum a_k < \infty$

Θέτουμε $\beta_k = |a_k| - a_k$, $k \in \mathbb{N}$

Επειδή, $a_k \leq |a_k|$ και $-a_k \leq |a_k|$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έπεται:

$$0 \leq \beta_k = |a_k| - a_k \leq |a_k| + |a_k| = 2|a_k|$$

Ούσα η σειρά $\sum |a_k|$ συγκλίνουσα

και $0 \leq \beta_k \leq 2|a_k|$, από το κριτήριο

σύγκρισης σειρών συνεπάγεται ότι η σειρά

$\sum a_k$ είναι συγκλίνουσα.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, για παράδειγμα

η σειρά $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ συγκλίνει, γιατί πρόκειται για μια εναλλάσσουσα σειρά και η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητική, φθίνουσα και μηδενική (δηλ. $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$) (οπότε από το κρ. Liebnitz η σειρά $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ συγκλίνει). Ωστόσο, η σειρά

$$\sum \left| (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \right| = \sum \frac{1}{k}$$

απειρίζεται θετικά καθώς είναι αρμονική σειρά τάξης $p = 1 \leq 1$

ii. $a_n := \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3} - 1}, \quad n \geq 2$

Εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης επιλέγοντας μια κατάλληλη πραγματική ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παίρνοντας από αυτήν τις μεγαλύτερες δυνάμεις. Δηλαδή,

$$\beta_n := \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{n^{1/2}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Τώρα, $\lim_n \dfrac{a_n}{\beta_n} = \lim_n \dfrac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}-1} = 1$

Οπότε, αφού $1 \in (0,+\infty)$ και η $\sum_{n=2}^{\infty} \beta_n = +\infty$

από το οριακό κριτήριο σύγκρισης συνάγουμε ότι

η $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ (δηλ. απειρίζεται θετικά)

Για την σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, θεωρούμε

την ακολουθία $\alpha_n := \frac{1}{n \ln n} \geq 0$, $n \geq 2$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο δυνάμεων του 2 (ή συμπύκνωσης του Cauchy). Θδο η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών, και έπειτα θα μελετήσουμε τη σειρά

$\sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1} \alpha_{2^{n-1}}$ ως προς τη σύγκλιση.

Οπότε, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{n+1 > n}_{(1)} \overset{\ln(\cdot)\nearrow}{\Longrightarrow} \underbrace{\ln(n+1) > \ln n}_{(2)}$.

Πολ/ζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε : $(n+1)\ln(n+1) > n \cdot \ln n$

ή ισοδύναμα $\alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \cdot \ln n} = \alpha_n$

Άρα, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνήσια φθίνουσα ακολουθία.

Τώρα,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^{n-1}} \frac{1}{\cancel{2^{n-1}} \ln 2^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2\,(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{αρμονική σειρά τάξης } p=1} = +\infty.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} = +\infty$.

Του iii η απάντηση δίνεται στην τελευταία σελίδα

Θέμα 2 :

i) Θδο αν f, g ομοιομ. συνεχείς, τότε $g \circ f$ ομοιόμορφα συνεχής, δηλ. αρκεί νδο $\forall (x_n), (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθίες στο A τ/ω $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0$ η διαφορά των εικόνων : $g \circ f(x_n) - g \circ f(y_n) \xrightarrow{n} 0$

Έστω λοιπόν $(x_n), (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δύο τυχαίες ακολουθίες στο σύνολο A με $x_n - y_n \xrightarrow{n} 0$

Εφόσον, f ομοιομ συνεχής στο A, ισχύει

$$f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n} 0$$

Επειδή, οι ακολουθίες των εικόνων $(f(x_n))$ και $(f(y_n))$ ανήκουν στο B, στο οποίο η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα ισχύει ότι:

$$g(f(x_n)) - g(f(y_n)) \xrightarrow{n} 0$$

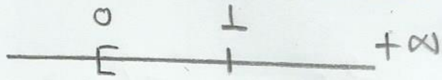
ii. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0,1)$

Αρκεί νδο f συνεχής στο $(0,1)$ και ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Αρχικά, η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sin x}{x} = \sin 1$.

Επομένως, η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$

$g(x) = x^{1/3}$, $\quad x \in [0,+\infty)$



Αρκεί νδο

- g συνεχής στο $[0,+\infty)$
- g ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,+\infty)$ για κάποιο (κατάλληλο) $a>0$.

- Προφανώς g συνεχής στο $[0,+\infty)$ ως σύνθεση ρίζας με συνεχή συνάρτηση
- Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο της ομοιόμορφης συνέχειας. Δηλαδή, ότι η g είναι Lipschitz συνεχής στο $[1,+\infty)$ (οπότε θέτουμε $a=1$)

Αρκεί νδο η g είναι φραγμένης μεταβολής δηλ. η g' είναι φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[1,+\infty)$. Αρχικά, g παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}, \quad \forall x \ge 1$$

Για κάθε $x \geq 1$:

$$|g'(x)| = \frac{1}{3}\cdot\left|\frac{1}{x^{2/3}}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{|x|^{2/3}} \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{3}.$$

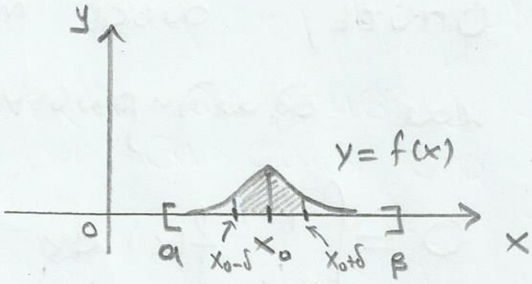
Συνεπώς, η g' φραγμένη από το $\frac{1}{3}$.

Οπότε, η g είναι Lipschitz συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$ και άρα ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Τελικά, g ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

<u>Θέμα 3:</u>

i. Υποθέτουμε ότι



$$\left.\begin{array}{l}\exists\, x_0 \in [\alpha,\beta] : f^2(x_0) \neq 0 \\ \text{και αφού } f^2 > 0\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f^2(x_0) > 0$. Εφόσον, f συνεχής, τότε και η f^2 συνεχής $\Rightarrow f^2$ συνεχής στο x_0. Από τον απειροστικό λογισμό I, αυτό σημαίνει ότι η f^2 θα διατηρεί σταθερό (θετικό) πρόσημο σε μια περιοχή του x_0. Πράγματι,

Εφόσον f^2 συνεχής στο x_0, τότε εξ' ορισμού

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in[\alpha,\beta])\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f^2(x)-f^2(x_0)|<\varepsilon.$$

Ιδιαίτερα, για $\varepsilon := \dfrac{f^2(x_0)}{2}$, έχουμε:

$\exists \delta>0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ να ισχύει

$$|f^2(x)-f^2(x_0)|<\frac{f^2(x_0)}{2} \iff$$

$$f^2(x_0)-\frac{f^2(x_0)}{2}<f^2(x)<f^2(x_0)+\frac{f^2(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$f^2(x)>\frac{f^2(x_0)}{2}:=\varepsilon>0.$$

Εν ολίγοις, $\exists\delta>0: f^2(x)>\varepsilon,\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

Οπότε, αφού η f^2 συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, θα είναι και ολοκληρώσιμη σε αυτό, με

$$0=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon\,dx = 2\delta\varepsilon>0$$

(Άτοπο)

Άρα, $f^2(x)=0,\ \forall x\in[\alpha,\beta] \Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$.

ii. Δίνεται ότι $L(f,P) \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P)$

όπου P' εκλέπτυνση της P.

Θδο $\forall\, Q, R$ διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$:

$$L(f,R) \le U(f,Q)$$

Θέτω $P = Q \cup R$ (εκλέπτυνση των Q & R)

Οπότε, από το δεδομένο μας

$$L(f,R) \le L(f,P) \le U(f,P) \le U(f,Q).$$

ΘΕΜΑ 4

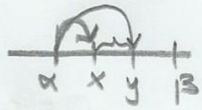
i. Θδο $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Δηλ. Θδο

$\exists\, K>0 : |F(x) - F(y)| \le K|x-y|$, $\forall x,y \in [a,\beta]$

Εφόσον, f ολοκληρώσιμη $\Rightarrow f$ φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$, δηλ. $\exists\, K>0 : |f(x)| \le K$, $\forall x \in [a,\beta]$

Ισχυριζόμαστε ότι το K είναι το ζητούμενο K της συνθήκης Lipschitz.

Έστω λοιπόν $x, y \in [\alpha, \beta]$ με $x<y$. Είναι:



$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_\alpha^y f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt$$

$$\le \int_x^y K\,dt = K \int_x^y dt$$

$$= K(x-y).$$

ii. $\displaystyle \int \frac{dx}{(x-3)(x+4)^2}$

Πρόκειται για ολοκληρώματα ρητής μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$.

<u>1ο βήμα</u>: Εντοπίζω τις πραγματικές ρίζες του $Q(x) = (x-3)(x+4)^2$. Αυτές είναι οι $\rho_1 = 3$ και $\rho_2 = 4$

<u>2ο βήμα</u>: Βρίσκω τις πολλαπλότητες των ριζών

Η $\rho_1 = 3$ <u>απλή</u> (άρα πολ/τα 1) και η $\rho_2 = 4$ διπλή (άρα πολ/τα 2)

3ο βήμα: Αναλύω τη ρητή παράσταση

$$\frac{1}{(x-3)(x+4)^2}$$ σε αθροίσματα ρητών της μορφής

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{\Gamma}{(x+4)^2}$$ και προσδιορίζω

τα A, B και Γ από την εξίσωση των ομοβάθμιων όρων στην ισότητα που θα προκύψει. Επί της ουσίας:

$$\frac{1}{(x-3)(x+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{\Gamma}{(x+4)^2}$$

$$\text{Εκπ} = (x-3)(x+4)^2 \neq 0$$

$$1 = A(x+4)^2 + B(x-3)(x+4) + \Gamma(x-3)$$

$$1 = (A+B)x^2 + (8A+B+\Gamma)x + 16A - 12B - 3\Gamma$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ 8A+B+\Gamma=0 \Rightarrow \Gamma=-8A-B=8B-B=7B \\ 16A-12B-3\Gamma=1 \Rightarrow 16(-B)-12B-3(7B)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{49}}$$

Άρα, $A = \frac{1}{49}$ και $\Gamma = -\frac{7}{49} = -\frac{1}{7}$.

Συνεπώς,

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)^2} = \int \frac{1/49}{x-3}\,dx + \int \frac{-1/49}{x+4}\,dx + \int \frac{-1/7}{(x+4)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{49}\ln|x-3| - \frac{1}{49}\ln|x+4| + \frac{1}{7}\frac{1}{x+4} + c$$

Ονομάζω $I := \int e^{2x}\cos x\,dx$

Επιλέγω οποια από τις δύο συναρτήσεις επιθυμώ (είτε την e^{2x} είτε την $\cos x$) και εφαρμόζω δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση. Εφόσον δεν υπάρχει κάποιος συντελεστής εντός του $\cos x$ είναι ευκολότερο να αντιπαραγωγίσω αυτό. Οπότε,

$$I = \int e^{2x}(\sin x)'\,dx = e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\,dx$$

$$= e^{2x}\sin x + 2\int e^{2x}(\cos x)'\,dx =$$

$$= e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\underbrace{\int e^{2x}\cos x\,dx}_{=I}$$

Άρα, $I + 4I = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x$

$$I = \frac{1}{5}\cdot\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right) + c$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^6 x \cdot \sin^5 x \, dx$$

Πάντα κάνω τις περιττές δυνάμεις, άρτιες.

Οπότε,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^6 x \, \sin^4 x \, \sin x \, dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^6 x \, (1-\cos^2 x)^2 \, \underline{\sin x \, dx}$$

Κατ' ουσίαν έχω ορισμένο ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ $\left[f = x^6(1-x^2)^2,\ \varphi = \cos x\right]$

Οπότε, θέτω $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$

Για $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ και

Για $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Έτσι, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται

στο

$$-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} u^6(1-u^2)^2\, du =$$

$$-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} u^6(u^4-2u^2+1)\, du =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (u^{10}-2u^8+u^6)\, du =$$

$$\left[\frac{u^{11}}{11} - \frac{2}{9}u^9 + \frac{u^7}{7}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{11}}{11} - \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7}{7} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{11} + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7}.$$

iii. Αρχικά, f συνεχής $\Rightarrow$ F παραγωγίσιμη

με $F'(x) = \cos(e^{2x})\cdot e^x$ και

$F'(1) = \cos(e^2)\cdot e$

iv. $$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y\to+\infty}\int_5^{y} \frac{dx}{\sqrt{x}-2} \quad (1)$$

Το $\int_5^{y} \frac{dx}{\sqrt{x}-2}$ είναι της μορφής

$$\int_a^{\beta} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx \quad \left[\!\left[\, f=\frac{2}{x-2} \text{ και } \varphi=\sqrt{x}\,\right]\!\right]$$

Θέτω $\sqrt{x}=u \Leftrightarrow x=u^2 \Leftrightarrow dx=2u\,du$

Για $x=5 \Rightarrow u=\sqrt{5}$

Για $x=y \Rightarrow u=\sqrt{y}$

Οπότε, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται

σε το:

Ρητή της μορφής $\frac{P(u)}{Q(u)}$ με $\deg(P(u)) \geq \deg(Q(u))$

$$\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{y}} \left(\frac{2u}{u-2}\right) du$$

$$\begin{array}{r|l} 2u & u-2 \\ \hline -2u+4 & 2 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{y}} \left(2+\frac{4}{u-2}\right) du$$

$$= \left[2u\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{y}} - 4\left[\ln|u-2|\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{y}} \qquad \frac{2u}{u-2} = 2+\frac{4}{u-2}$$

$$= 2\sqrt{y} - 2\sqrt{5} + 4\ln\left|\frac{\sqrt{y}-2}{\sqrt{5}-2}\right| .$$

Οπότε,

$$\int_5^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}-2}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\left(\overbrace{2\sqrt{y}}^{+\infty}-2\sqrt{5}+\overbrace{4\ln\left|\frac{\sqrt{y}-2}{\sqrt{5}-2}\right|}^{+\infty}\right)$$

$$= +\infty$$

β' τρόπος: Μιας και έχω κλάσμα με ρίζα στην υποολοκλήρωση συνάρτηση θα μπορούσα να θέσω την $\frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$ για την οποία γνωρίζω ότι $\int_5^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$ και να εφαρμόσω οριακό κριτήριο σύγκρισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Οπότε, αφού το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}-2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 1$$

$1 \in (0,+\infty)$ Τότε, $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Θέμα 5ο [Ιούνιος 2019]

Αν $f(x) = \cos(7x)$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{2n}(x) = T_{2n,f,0}(x)$ της f τάξης $2n$ με κέντρο το 0. Να βρείτε επίσης μια έκφραση για το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor $R_{2n}(x) = R_{2n,f,0}(x)$.

Τέλος, νδο $\lim\limits_{n} T_{2n}(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ:

Είναι, $f'(x) = (-1)^1 \cdot 7 \sin 7x$ (περιττή παραγ. 1)

$f''(x) = (-1)^1\, 7^2 \cos 7x$ (άρτια παραγ. 1)

$f'''(x) = (-1)^2 \cdot 7^3 \cdot \sin 7x$ (περιττή παραγ 2)

$f^{(4)}(x) = (-1)^2\, 7^4 \cdot \cos 7x$ (άρτια παραγ 2)

$\vdots$

$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k \cdot 7^{2k-1} \sin 7x$

$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot 7^{2k} \cos 7x$, $k = 1, 2, \ldots$

Για $x=0$: $f^{(2k)}(0) = (-1)^k \cdot \pi^{2k}$ και

$f^{(2k-1)}(0) = 0$, $k=1,2,\dots$

Άρα,

$$T_{2n}(x) := T_{2n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$f(0) + \cancel{\frac{f'(0)}{1!}x}^{\,0} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$f(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} =$$

$$1 + \frac{(-1)\pi^2}{2!}x^2 + \frac{(-1)^2 \cdot \pi^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot {}^{2n}}{(2n)!}x^{2n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot \pi^{2k}}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

Μένει νδο $\lim_{n} R_{n,f,0}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Το υπόλοιπο Lagrange είναι:

$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, για κάποιο

ξ στο διάστημα με άκρα το 0 και $x \neq 0$

III

Οπότε, $R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^{2n+1} \cdot f^{2n+1} \sin(f\xi)$

$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi) \right| =$

$\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \, |f^{(2n+1)}(\xi)| \leq \underbrace{\frac{f^{2n+1}}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}}_{:= a_n}$

Όμως, $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, και άρα

το κριτήριο του λόγου δηλώνει ότι $a_n \to 0$

Άρα, $|R_{2n}(x)| \xrightarrow{n} 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ή

$R_{2n}(x) \xrightarrow{n} 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Συμπέρασμα:</u> $f(x) = \cos fx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot f^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$

$x \in \mathbb{R}$.

iii. (Θέμα 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$ Δυναμοσειρά κέντρου $x_0=0$

$\alpha_n := \frac{1}{n2^n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ισχυρισμός:
Η σειρά $\sum \frac{x^n}{n2^n}$ συγκλίνει $\forall\, x \in [-2,2)$

Η ακτίνα σύγκλισης:

$$R = \lim_n \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \lim_n \frac{(n+1)2^{n+1}}{n \cdot 2^n} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)\cancel{2^n}2}{n \cdot \cancel{2^n}} = \lim \left(2 + \frac{2}{n}\right) = 2$$

Οπότε, η δυναμοσειρά $\sum \frac{x^n}{n2^n}$ συγκλίνει

$\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-0| < 2 \Rightarrow x \in (-2,2)$.

Για $x=2$: $\sum \frac{\cancel{2^n}}{n\cancel{2^n}} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Για $x=-2$: $\sum (-1)^n \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} n} = \sum (-1)^n \frac{1}{n}$

συγκλίνει από το κριτήριο Leibnitz